

PROFMAT ENA 2027

Resoluções detalhadas das 30 questões

Este caderno apresenta o raciocínio, os cálculos e as respostas das 30 questões do material de estudo PROFMAT ENA 2027. As resoluções seguem a numeração do caderno de questões e podem ser lidas junto dele.

Material independente e não oficial. Na questão 23, as alternativas B e E representam o mesmo valor; a resolução explica essa equivalência.

Questão 1 Probabilidade e múltiplos de 6

O que se pede: escolher, com a mesma chance, um dos naturais de 1 a 100 e calcular a probabilidade de ele não ser múltiplo de 6.

1. Contamos primeiro o evento contrário. Os múltiplos de 6 nesse intervalo são 6, 12, 18, ..., 96. Como $6 \times 16 = 96$ e $6 \times 17 = 102$, há exatamente 16 deles.

2. Dos 100 resultados possíveis, os que não são múltiplos de 6 totalizam $100 - 16 = 84$.

3. Em uma escolha equiprovável, a probabilidade é o número de resultados favoráveis dividido pelo número de resultados possíveis.

$$P = \frac{84}{100} = 0,84 = 84\%$$

Alternativa E. A probabilidade é 84%.

Questão 2 Crescimento populacional

O que se pede: estimar a população após n anos, partindo de P_0 e considerando crescimento de 1% ao ano.

1. Crescer 1% significa manter 100% da população e acrescentar 1%. Portanto, a população de cada ano é multiplicada por 1,01.

$$P_1 = P_0 + 0,01P_0 = 1,01P_0$$

2. No segundo ano, o aumento incide sobre a população já atualizada, e não apenas sobre P_0 . Assim, o crescimento é composto.

$$P_2 = 1,01P_1 = (1,01)^2P_0$$

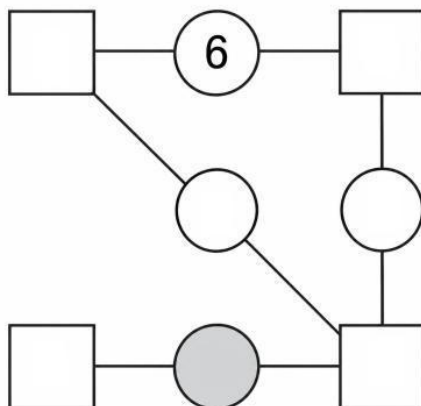
3. Repetindo esse fator n vezes, obtemos a expressão procurada. A fórmula $P_0(1 + 0,01n)$ representaria um acréscimo anual calculado sempre sobre a população inicial, o que não corresponde ao enunciado.

$$P_n = (1,01)^nP_0$$

Alternativa A. A população estimada é $(1,01)^nP_0$.

Questão 3 Distribuição de números nas figuras

O que se pede: distribuir os números de 2 a 9, sem repetição, de modo que cada círculo contenha a soma dos quadrados ligados a ele, e determinar o círculo cinza.



1. O círculo superior já contém 6. Os dois quadrados superiores precisam, portanto, somar 6. Como os números são distintos e pertencem ao conjunto indicado, a única possibilidade é usar 2 e 4. A decomposição $3 + 3$ é proibida pela repetição.
2. Seja d o número do quadrado inferior direito. Os círculos central e direito contêm $2 + d$ e $4 + d$, em alguma ordem. Como nenhum valor pode ultrapassar 9, temos $d \leq 5$. Os números 2, 4 e 6 já estão usados; restam apenas $d = 3$ ou $d = 5$ nessa faixa.
3. Se $d = 3$, esses círculos recebem 5 e 7. Sobram 8 e 9 para o quadrado inferior esquerdo e o círculo cinza. Isso é impossível: o círculo cinza teria de ser $3 + 8 = 11$ ou $3 + 9 = 12$, fora do conjunto.
4. Logo, $d = 5$. Os dois círculos recebem 7 e 9, e sobram 3 e 8. O quadrado inferior esquerdo recebe 3, e o círculo cinza recebe $3 + 5 = 8$. Todos os números de 2 a 9 são utilizados uma única vez.

Alternativa D. O círculo cinza contém 8.

Questão 4 Equações com a mesma solução

O que se pede: determinar k para que $2x + 3k - 5 = 0$ e $7x - 13k + 9 = 0$ tenham a mesma solução em x .

1. Isolamos x em cada equação. Os divisores 2 e 7 são não nulos, portanto não há restrição adicional sobre k .

$$x = \frac{5 - 3k}{2}$$
$$x = \frac{13k - 9}{7}$$

2. Igualamos as duas expressões, pois o valor de x deve ser o mesmo. Em seguida, multiplicamos pelos denominadores.

$$\frac{5 - 3k}{2} = \frac{13k - 9}{7} \Rightarrow 7(5 - 3k) = 2(13k - 9)$$

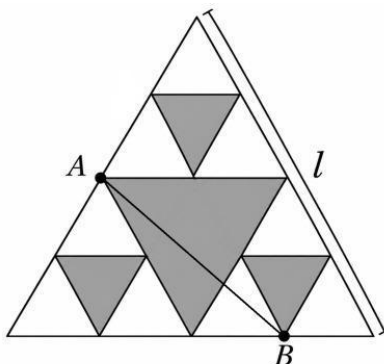
3. Desenvolvemos os produtos e reunimos os termos com k em um lado e os termos constantes no outro.

$$35 - 21k = 26k - 18 \Rightarrow 53 = 47k \Rightarrow k = \frac{53}{47}$$

Alternativa B. O valor de k é $53/47$.

Questão 5 Distância no triângulo de Sierpinski

O que se pede: calcular a distância AB na figura, em função do lado ℓ do triângulo equilátero principal.



1. Colocamos a base do triângulo na horizontal, com o vértice esquerdo na origem. Pelo teorema de Pitágoras, a altura de um triângulo equilátero de lado ℓ é $h = \ell\sqrt{3}/2$.

2. O vértice superior tem coordenadas $(\ell/2, h)$. Como A é o ponto médio do lado esquerdo, suas coordenadas são $(\ell/4, h/2)$. O ponto B fica no meio da metade direita da base, portanto $B = (3\ell/4, 0)$.

3. Entre A e B, a diferença horizontal é $\ell/2$, e a diferença vertical, em valor absoluto, é $h/2 = \ell\sqrt{3}/4$. Essas medidas são os catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa AB .

$$AB^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{4\ell^2}{16} + \frac{3\ell^2}{16} = \frac{7\ell^2}{16}$$

4. Como uma distância é positiva, tomamos a raiz quadrada positiva.

$$AB = \frac{\ell\sqrt{7}}{4}$$

Alternativa A. A distância é $\ell\sqrt{7}/4$.

Questão 6 Área sombreada no fractal

O que se pede: determinar a fração da área do triângulo principal ocupada pelo triângulo central e pelos três triângulos invertidos da segunda etapa.

1. Em figuras semelhantes, a razão entre as áreas é o quadrado da razão entre os lados. O triângulo central tem lado $\ell/2$; portanto, sua área corresponde a $(1/2)^2 = 1/4$ da área total.

2. Cada triângulo sombreado da segunda etapa tem lado $\ell/4$. Sua área corresponde, então, a $(1/4)^2 = 1/16$ da área total. Há três triângulos desse tamanho.

3. As regiões sombreadas não se sobrepõem em áreas: apenas se encontram em pontos ou bordas. Por isso, podemos somar suas áreas diretamente.

$$\frac{A_{\text{sombreada}}}{A_{\text{total}}} = \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{4}{16} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$$

Alternativa C. A razão entre as áreas é $7/16$.

Questão 7 Termo central de uma progressão aritmética

O que se pede: encontrar o termo de posição 1001 de uma PA com 2001 termos, primeiro termo 17 e último termo 4043.

1. Uma PA tem diferença constante entre termos consecutivos. O termo de posição 1001 é o termo central: existem 1000 termos antes dele e 1000 depois dele.

2. O primeiro e o último termos ficam à mesma distância do termo central. Assim, o termo central é a média aritmética dos extremos.

$$a_{1001} = \frac{a_1 + a_{2001}}{2} = \frac{17 + 4043}{2} = \frac{4060}{2} = 2030$$

3. Podemos conferir pela razão. Entre o primeiro e o último termos existem 2000 intervalos; a razão é $(4043 - 17)/2000 = 2,013$. Após 1000 intervalos, temos $17 + 1000 \times 2,013 = 2030$. A razão de uma PA não precisa ser inteira.

Alternativa D. O milésimo primeiro termo é 2030.

Questão 8 Afirmarções sobre números irracionais

O que se pede: julgar as afirmações I, II e III sobre soma e raízes de números reais.

1. A afirmação I é verdadeira. Suponha que x e y sejam racionais, com $y \neq 0$, e que $x + y\sqrt{2}$ seja racional. Subtraindo x e dividindo por y , obteríamos $\sqrt{2}$ como quociente de racionais, o que contradiz sua irracionalidade.

$$\sqrt{2} = \frac{(x + y\sqrt{2}) - x}{y}$$

2. A afirmação II também é verdadeira. Se $x > 0$ é irracional e $\sqrt{x}$ fosse racional, seu quadrado seria racional. Mas $(\sqrt{x})^2 = x$, contradizendo a hipótese.

3. A afirmação III é falsa. Basta apresentar um contraexemplo: para $x = 4$, a raiz quarta é $\sqrt[4]{4}$, que é irracional, enquanto a raiz quadrada é 2, que é racional.

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}$$

4. Portanto, somente I e II estão corretas. Um único contraexemplo já é suficiente para refutar uma afirmação universal como a III.

Alternativa C. São verdadeiras I e II, apenas.

Questão 9 Perímetros e comparação de áreas

O que se pede: comparar a área de um retângulo com a de um quadrado, sabendo que o perímetro do retângulo é 20% maior e um de seus lados é 20% menor que o lado do quadrado.

1. Seja $s > 0$ o lado do quadrado. Seu perímetro é $4s$ e sua área é s^2 . O lado conhecido do retângulo mede $0,8s$, pois corresponde a 80% de s .

2. Se t é o outro lado do retângulo, seu perímetro é $2(0,8s + t)$. Esse perímetro equivale a 120% do perímetro do quadrado.

$$2(0,8s + t) = 1,2 \cdot 4s = 4,8s$$

3. Dividimos por 2 e isolamos t . Depois, multiplicamos os lados para obter a área do retângulo.

$$0,8s + t = 2,4s \Rightarrow t = 1,6s$$

$$A_R = (0,8s)(1,6s) = 1,28s^2 = 1,28A_Q$$

4. O fator 1,28 indica 128% da área original, isto é, um aumento de 28%. A variação percentual do perímetro não é, em geral, a mesma da área.

Alternativa B. A área do retângulo é 28% maior.

Questão 10 Média após a retirada de dois navios

O que se pede: calcular a nova média de emissão anual dos 13 navios restantes. Todos os cálculos a seguir usam milhares de toneladas.

1. A média é a soma dos valores dividida pela quantidade de elementos. Portanto, recuperamos a emissão total multiplicando a média antiga pelo número de navios.

$$T = 15 \cdot 28 = 420$$

2. Retiramos do total as emissões dos dois navios que saíram de circulação: 46 e 20. A quantidade de navios também muda, de 15 para 13.

$$T_{\text{restante}} = 420 - 46 - 20 = 354$$

3. Dividimos o novo total pela nova quantidade e arredondamos para uma casa decimal, como nas alternativas.

$$\bar{x} = \frac{354}{13} = 27,230769 \dots \approx 27,2$$

4. O resultado é coerente: os dois navios retirados tinham média 33, superior à média inicial de 28. Sua retirada faz a média dos restantes diminuir.

Alternativa B. A nova média é aproximadamente 27,2 mil toneladas por navio.

Questão 11 Interseção de conjuntos e complementar

O que se pede: identificar a expressão que é necessariamente vazia quando $A \cap B = \emptyset$ e A está contido em C .

1. A condição $A \cap B = \emptyset$ significa que nenhum elemento pertence simultaneamente a A e B .

2. Como A está contido em C , todo elemento de A pertence a C . Logo, nenhum elemento de A pode estar no complementar de C , indicado por C^c . Portanto, $A \cap C^c = \emptyset$.

3. Aplicamos a propriedade distributiva da interseção sobre a união à expressão da alternativa A.

$$A \cap (B \cup C^c) = (A \cap B) \cup (A \cap C^c) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

4. A palavra “necessariamente” exige que isso aconteça em todos os casos permitidos. Nas demais alternativas, podem aparecer elementos de B fora de C , elementos de A ou elementos de $C \cap B$; as hipóteses não obrigam essas regiões a serem vazias. Também não exigem que $A = U$.

Alternativa A. $A \cap (B \cup C^c)$ é sempre vazio.

Questão 12 Números de três algarismos sem o dígito 5

O que se pede: contar os naturais de três algarismos que não apresentam o dígito 5 em nenhuma posição.

1. Na centena, o algarismo não pode ser 0, pois o número deixaria de ter três algarismos. Também não pode ser 5. Sobram 8 escolhas: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 e 9.

2. Na dezena, o 0 é permitido, mas o 5 continua proibido. Há 9 escolhas. Na unidade ocorre o mesmo: mais 9 escolhas.

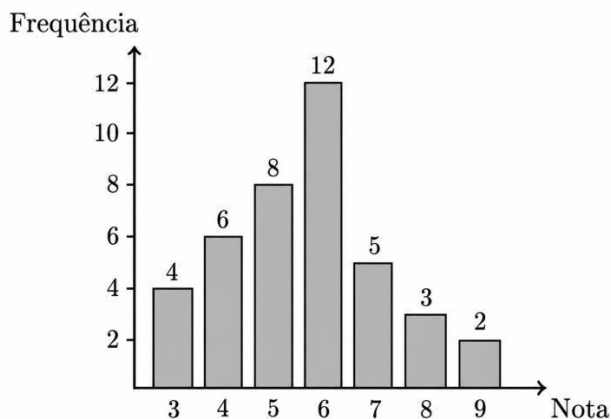
3. As escolhas das posições são independentes, e o enunciado permite repetir algarismos. Pelo princípio multiplicativo, multiplicamos as quantidades.

$$N = 8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$$

Alternativa A. Existem 648 números.

Questão 13 Média mediana e moda no gráfico

O que se pede: comparar a média m , a mediana M e a moda M_o das notas dos 40 candidatos.



1. Lendo o gráfico, as notas 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 têm frequências 4, 6, 8, 12, 5, 3 e 2, respectivamente. A soma das frequências é 40, como informa o enunciado.

2. A média deve considerar quantas vezes cada nota aparece. Por isso, fazemos uma média ponderada pelas frequências.

$$m = \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 12 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 2}{40} = \frac{225}{40} = 5,625$$

3. Como há 40 notas, a mediana é a média entre a 20ª e a 21ª notas na lista ordenada. Até a nota 5 há $4 + 6 + 8 = 18$ candidatos. Com os 12 candidatos de nota 6, as posições 19 a 30 são ocupadas pela nota 6. Logo, ambas as posições centrais valem 6 e $M = 6$.

4. A moda é a nota de maior frequência. A maior frequência é 12 e corresponde à nota 6; portanto, $M_o = 6$. Assim, $5,625 < 6 = 6$.

Alternativa E. A relação é $m < M_o = M$.

Questão 14 Área de um trapézio isósceles

O que se pede: calcular a área do trapézio isósceles de bases 8 cm e 4 cm e lados não paralelos de 4 cm.

1. Traçamos as alturas a partir dos extremos da base menor. Formam-se um retângulo central e dois triângulos retângulos congruentes nas laterais.

2. A diferença entre as bases é $8 - 4 = 4$ cm. Como o trapézio é isósceles, essa diferença se divide igualmente entre os dois triângulos: cada cateto horizontal mede 2 cm.

3. Em cada triângulo lateral, a hipotenusa é o lado oblíquo de 4 cm. Aplicando Pitágoras, encontramos a altura h .

$$h^2 + 2^2 = 4^2 \Rightarrow h^2 = 12 \Rightarrow h = 2\sqrt{3}\text{cm}$$

4. A área de um trapézio é a média das bases multiplicada pela altura.

$$A = \frac{8 + 4}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\text{cm}^2$$

Alternativa E. A área é $12\sqrt{3}$ cm².

Questão 15 Mínimo de uma função quadrática

O que se pede: determinar o menor valor de $f(x) = x^2 + bx + c$, sabendo que suas raízes distintas α e β estão a uma distância 4 uma da outra.

1. Como o coeficiente de x^2 é 1, a função pode ser escrita na forma fatorada $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$. A parábola tem concavidade voltada para cima; logo, o vértice representa seu valor mínimo.
2. A abscissa do vértice é o ponto médio entre as raízes. Denotando-a por v , temos $v = (\alpha + \beta)/2$.

$$v - \alpha = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$v - \beta = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

3. Avaliamos a função nesse ponto. Os dois fatores são opostos, e cada um tem valor absoluto 2, pois a distância entre as raízes é 4.

$$f(v) = \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot \frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{(\alpha - \beta)^2}{4} = -\frac{16}{4} = -4$$

4. Não é necessário descobrir α , β , b ou c separadamente. A distância entre as raízes e o coeficiente de x^2 já determinam a profundidade do vértice.

Alternativa B. O menor valor da função é -4.

Questão 16 Classificação de um triângulo pelos lados

O que se pede: analisar as condições para que um triângulo de lados 3, 4 e x seja acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

1. Antes de classificar os ângulos, verificamos se o triângulo existe. A desigualdade triangular exige que o terceiro lado seja maior que a diferença e menor que a soma dos outros dois.

$$4 - 3 < x < 4 + 3 \Rightarrow 1 < x < 7$$

2. Para um triângulo de maior lado L , com outros lados p e q , comparamos L^2 e $p^2 + q^2$. Se L^2 é menor, o triângulo é acutângulo; se é igual, retângulo; se é maior, obtusângulo. É indispensável identificar o maior lado antes de aplicar esse critério.
3. Quando $1 < x \leq 4$, o maior lado é 4. A comparação é entre 16 e $9 + x^2$. A igualdade ocorre quando $x^2 = 7$, isto é, $x = \sqrt{7}$. Nesse trecho, o triângulo é obtusângulo para $1 < x < \sqrt{7}$ e acutângulo para $\sqrt{7} < x \leq 4$.
4. Quando $4 \leq x < 7$, o maior lado é x . Comparamos x^2 com $3^2 + 4^2 = 25$. A igualdade ocorre em $x = 5$. Nesse trecho, o triângulo é acutângulo para $4 \leq x < 5$ e obtusângulo para $5 < x < 7$.
5. Unindo os intervalos, obtemos exatamente as três afirmações: acutângulo para $\sqrt{7} < x < 5$; retângulo para $x = \sqrt{7}$ ou $x = 5$; obtusângulo para $1 < x < \sqrt{7}$ ou $5 < x < 7$. Os extremos 1 e 7 são excluídos porque não formam triângulos.

Alternativa E. As afirmações I, II e III são verdadeiras.

Questão 17 Equação com módulos

O que se pede: somar todas as soluções reais de $|2x - 1| = |4x + 7|$.

1. Dois números reais têm o mesmo módulo quando são iguais ou opostos. Assim, a equação equivale a dois casos, que precisam ser considerados.
2. No primeiro caso, igualamos diretamente as expressões.

$$2x - 1 = 4x + 7 \Rightarrow -2x = 8 \Rightarrow x = -4$$

3. No segundo caso, uma expressão é o oposto da outra. O sinal negativo deve ser distribuído por todos os termos do segundo membro.

$$2x - 1 = -(4x + 7) \Rightarrow 2x - 1 = -4x - 7 \Rightarrow x = -1$$

4. Para $x = -4$, os módulos são ambos 9; para $x = -1$, são ambos 3. As duas soluções são válidas, e sua soma é $-4 + (-1) = -5$.

Alternativa C. A soma das soluções é -5.

Questão 18 Múltiplos de 3 ou de 5

O que se pede: contar os naturais de 1 a 1000 que são múltiplos de 3 ou de 5, incluindo aqueles que são múltiplos de ambos.

1. Há 333 múltiplos de 3, pois $3 \times 333 = 999$ e o próximo já passa de 1000. Há 200 múltiplos de 5, pois $5 \times 200 = 1000$.

2. Se somarmos 333 e 200, contaremos duas vezes os números divisíveis simultaneamente por 3 e por 5. Como 3 e 5 são coprimos, esses números são exatamente os múltiplos de 15.

3. Há 66 múltiplos de 15 até 1000: o último é 990, e o próximo é 1005. Pelo princípio da inclusão e exclusão, subtraímos essa contagem uma vez.

$$N = 333 + 200 - 66 = 467$$

Alternativa D. Existem 467 números.

Questão 19 Cobrança por quilômetros completos

O que se pede: calcular o valor exibido pelo taxímetro após uma viagem de 32,5 km, com taxa inicial de R\$ 6,50 e acréscimo de R\$ 4,50 a cada quilômetro completo.

1. O detalhe decisivo é que o visor só muda após cada quilômetro completo. Durante o trecho entre 32 km e 33 km, o valor continua sendo o cobrado ao completar 32 km.

2. Portanto, uma viagem de 32,5 km produz 32 acréscimos de R\$ 4,50. O meio quilômetro final ainda não produz outro acréscimo.

$$32 \cdot 4,50 = 144,00$$

3. Somamos a taxa de embarque, que é cobrada uma única vez.

$$C = 6,50 + 144,00 = 150,50$$

4. Multiplicar 32,5 por 4,50 cobraria proporcionalmente a fração de quilômetro, contrariando a regra do visor. A alternativa C, por sua vez, também não inclui corretamente a taxa inicial.

Alternativa D. O custo é R\$ 150,50.

Questão 20 Duas raízes distintas maiores que 1

O que se pede: encontrar os valores de k para os quais $f_k(x) = x^2 - 2(k + 2)x + (k + 14)$ tem duas raízes reais distintas e ambas maiores que 1.

1. Para transformar “maiores que 1” em “positivas”, fazemos $t = x - 1$, ou seja, $x = t + 1$. Assim, $x > 1$ equivale a $t > 0$. Substituímos e simplificamos.

$$f_k(t + 1) = t^2 - 2(k + 1)t + (11 - k)$$

2. Para que essa equação em t tenha duas raízes reais distintas, o discriminante precisa ser estritamente positivo.

$$\Delta = [-2(k+1)]^2 - 4(11-k) = 4(k^2 + 3k - 10) = 4(k+5)(k-2)$$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (k < -5) \vee (k > 2)$$

3. Pelas relações de Viète, a soma das raízes em t é $2(k+1)$, e o produto é $11-k$. Para duas raízes reais serem positivas, o produto deve ser positivo e a soma também. O produto positivo garante sinais iguais; a soma positiva exclui a possibilidade de ambas serem negativas.

$$2(k+1) > 0 \Rightarrow k > -1$$

$$11-k > 0 \Rightarrow k < 11$$

4. Intersectamos as três condições. O trecho $k < -5$ é incompatível com $k > -1$. Resta apenas $2 < k < 11$, que satisfaz todas as exigências.

5. Em $k = 2$, o discriminante é zero e as raízes coincidem. Em $k = 11$, uma raiz em t é zero, de modo que uma raiz em x vale 1. Por isso, os dois extremos são excluídos.

Alternativa B. O conjunto procurado é $2 < k < 11$.

Questão 21 Capacidade do copo

O que se pede: determinar a capacidade do copo e somar seus algarismos, sabendo que beber 200 mL reduz o conteúdo de $2/3$ para $1/4$ da capacidade.

1. Seja V a capacidade total, em mL. O volume inicial é $2V/3$, e o volume final é $V/4$. A diferença entre eles corresponde aos 200 mL bebidos.

$$\frac{2V}{3} - \frac{V}{4} = 200$$

2. Usamos o denominador comum 12 para subtrair as frações e depois isolamos V .

$$\frac{8V - 3V}{12} = 200 \Rightarrow \frac{5V}{12} = 200 \Rightarrow V = 480\text{mL}$$

3. Conferindo: $2/3$ de 480 é 320 mL; depois de beber 200 mL, restam 120 mL, exatamente $1/4$ de 480.

4. A questão pede a soma dos algarismos, e não a capacidade. Assim, calculamos $4 + 8 + 0 = 12$.

Alternativa E. A capacidade é 480 mL e a soma dos algarismos é 12.

Questão 22 Inequação racional

O que se pede: resolver $1/(x-1) > 1/(x-2)$.

1. Os denominadores não podem ser zero. Portanto, $x \neq 1$ e $x \neq 2$. Como o sinal dos denominadores depende de x , não podemos multiplicar a inequação por eles sem analisar esse sinal.

2. Levamos tudo para o primeiro membro e reduzimos a uma única fração.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2) - (x-1)}{(x-1)(x-2)} > 0$$

$$\frac{-1}{(x-1)(x-2)} > 0$$

3. O numerador é sempre negativo. Para que a fração seja positiva, o denominador também deve ser negativo: $(x-1)(x-2) < 0$.

4. Se $x < 1$, os dois fatores são negativos e o produto é positivo. Se $1 < x < 2$, um fator é positivo e o outro negativo; o produto é negativo. Se $x > 2$, os dois são positivos. Apenas o intervalo entre 1 e 2 satisfaz a condição.

Alternativa D. A solução é o intervalo aberto (1, 2).

Questão 23 Seno de um ângulo no quadrado

O que se pede: calcular o seno do ângulo $\widehat{MCD}$ em um quadrado $ABCD$ de lado 4 cm, com M no ponto médio de AB .

1. Nomeamos os vértices consecutivamente e traçamos por M uma perpendicular a CD , encontrando CD em N . Como AB é paralelo a CD , N é o ponto médio de CD . Assim, $CN = 2$ cm e $MN = 4$ cm.

2. No triângulo retângulo CMN , a hipotenusa é CM . Pelo teorema de Pitágoras:

$$CM = \sqrt{CN^2 + MN^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

3. Os segmentos CN e CD têm a mesma direção a partir de C . Portanto, o ângulo $\widehat{MCD}$ é o mesmo que $\widehat{MCN}$. Seu cateto oposto é $MN = 4$, e sua hipotenusa é $CM = 2\sqrt{5}$.

$$\text{sen}(\widehat{MCD}) = \frac{MN}{CM} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

4. A última igualdade resulta da racionalização: multiplicamos numerador e denominador por $\sqrt{5}$. A alternativa B apresenta $2\sqrt{5}/5$, e a alternativa E apresenta $2/\sqrt{5}$; são o mesmo número. Logo, há duas alternativas corretas no arquivo.

Alternativas B e E. O seno é $2/\sqrt{5} = 2\sqrt{5}/5$.

Questão 24 Lógica das inscrições nos cofres

O que se pede: descobrir onde está o tesouro e qual inscrição é verdadeira, sabendo que exatamente uma das três inscrições diz a verdade.

1. A inscrição I afirma que o tesouro está no cofre I. A inscrição III afirma que ele não está no cofre I. Essas afirmações são negações uma da outra: uma será verdadeira e a outra falsa, qualquer que seja o cofre escolhido.

2. Portanto, I e III já garantem exatamente uma verdade entre elas. Para que o total de inscrições verdadeiras continue sendo apenas um, a inscrição II precisa ser falsa.

3. A inscrição II diz: “Este cofre não guarda o tesouro”, referindo-se ao cofre II. Se ela é falsa, o cofre II guarda o tesouro.

4. Conferimos o resultado: com o tesouro no cofre II, a inscrição I é falsa; a II também é falsa; e a III é verdadeira, pois o tesouro realmente não está no cofre I. A condição do enunciado é satisfeita.

Alternativa C. A inscrição III é verdadeira e o tesouro está no cofre II.

Questão 25 Área expressa em outra unidade

O que se pede: expressar a área de um quadrado de lado 3 cm usando como unidade a área de um triângulo equilátero de lado 1 cm.

1. A área do quadrado, na unidade usual, é $3^2 = 9$ cm².

2. Para um triângulo equilátero de lado a , a altura é $a\sqrt{3}/2$. Como a área é base vezes altura dividida por 2, obtemos $A = a^2\sqrt{3}/4$. Para $a = 1$ cm, a nova unidade vale $\sqrt{3}/4$ cm².

$$u = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

3. Para saber quantas unidades u cabem na área do quadrado, dividimos sua área pelo tamanho da unidade. Não multiplicamos as duas áreas.

$$\frac{9\text{cm}^2}{(\sqrt{3}/4)\text{cm}^2} = \frac{36}{\sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{3}$$

Alternativa A. A área do quadrado é $12\sqrt{3}$ unidades de área.

Questão 26 Escolha de bolas em uma urna

O que se pede: contar as maneiras de retirar 4 bolas de uma urna com 6 vermelhas e 4 de outras cores, exigindo que o número de vermelhas retiradas seja pelo menos o número de vermelhas restantes.

1. Seja r o número de vermelhas retiradas. Como há 6 vermelhas ao todo, ficam $6 - r$ na urna. A condição é $r \geq 6 - r$, isto é, $2r \geq 6$ e $r \geq 3$.
2. Como apenas 4 bolas são retiradas, os únicos casos possíveis são $r = 3$ e $r = 4$. As bolas são numeradas, portanto distinguíveis. Como a ordem da retirada não é solicitada, usamos combinações.
3. No caso de 3 vermelhas e 1 não vermelha, escolhemos 3 entre as 6 vermelhas e 1 entre as 4 restantes. Multiplicamos porque as duas escolhas compõem a mesma retirada.

$$N_3 = \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{4!}{1!3!} = 20 \cdot 4 = 80$$

4. No caso de 4 vermelhas, basta escolher 4 entre as 6. Os dois casos são distintos e não se sobrepõem, então somamos suas quantidades.

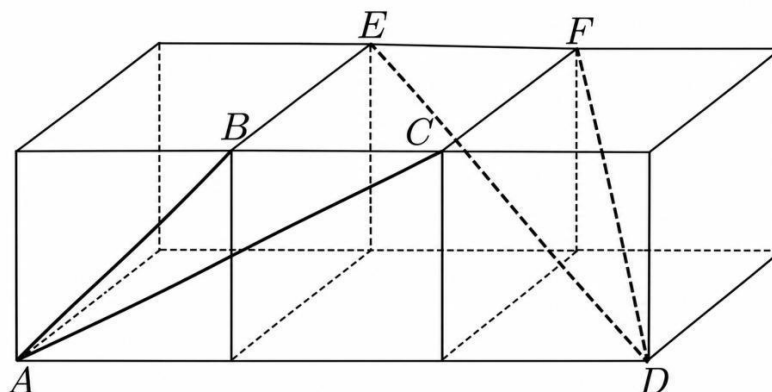
$$N_4 = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

$$N = N_3 + N_4 = 80 + 15 = 95$$

Alternativa C. Existem 95 maneiras.

Questão 27 Comprimentos em três cubos justapostos

O que se pede: identificar qual valor não aparece entre as medidas AB, AC, DE e DF, em três cubos justapostos de aresta 1.



1. Adotamos três eixos perpendiculares: comprimento ao longo dos três cubos, profundidade e altura. Colocamos A na origem. A leitura da figura fornece as coordenadas abaixo.

$$A = (0,0,0), B = (1,0,1), C = (2,0,1), D = (3,0,0)$$

$$E = (1,1,1), F = (2,1,1)$$

2. Em três dimensões, o quadrado da distância entre dois pontos é a soma dos quadrados das diferenças nas três coordenadas. Essa fórmula resulta de duas aplicações do teorema de Pitágoras.

$$AB = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$DE = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$DF = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

3. Portanto, o conjunto das medidas é $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}\}$. Entre as alternativas, o único valor ausente é $\sqrt{7}$. As inclinações aparentes do desenho em perspectiva não alteram essas distâncias espaciais.

Alternativa E. O valor que não pertence ao conjunto é $\sqrt{7}$.

Questão 28 Razões entre três números

O que se pede: calcular $(a + b)/c + a/(b + c)$, sabendo que $a/b = 4$ e $b/c = 3$.

1. As razões dadas exigem $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Da igualdade $b/c = 3$, obtemos $b = 3c$. Da igualdade $a/b = 4$, temos $a = 4b = 12c$.

2. Escrevemos todos os termos em função de c . Além disso, $b + c = 4c \neq 0$, de modo que a expressão procurada está definida.

$$\frac{a + b}{c} + \frac{a}{b + c} = \frac{12c + 3c}{c} + \frac{12c}{3c + c}$$

3. Simplificamos cada fração cancelando o fator não nulo c .

$$\frac{15c}{c} + \frac{12c}{4c} = 15 + 3 = 18$$

4. Os valores individuais de a , b e c podem variar, mas a expressão depende apenas das proporções entre eles; por isso, o resultado é fixo.

Alternativa C. O valor da expressão é 18.

Questão 29 Radicais e fatoriais

O que se pede: simplificar a expressão com raízes de $18!$, $17!$ e $16!$, sem calcular esses fatoriais numericamente.

$$T = \frac{(\sqrt{18!} + \sqrt{17!})(\sqrt{18} - 1)}{17\sqrt{16!}}$$

1. Pela definição de fatorial, $18! = 18 \times 17!$. Como os fatores são positivos, podemos separar a raiz do produto. Assim, $\sqrt{18!} = \sqrt{18} \times \sqrt{17!}$.

2. Colocamos $\sqrt{17!}$ em evidência na soma do numerador. Em seguida, usamos o produto de conjugados: $(u + 1)(u - 1) = u^2 - 1$.

$$\sqrt{18!} + \sqrt{17!} = \sqrt{17!}(\sqrt{18} + 1)$$

$$(\sqrt{18} + 1)(\sqrt{18} - 1) = 18 - 1 = 17$$

3. Cancelamos o fator 17. Depois, usamos $17! = 17 \times 16!$ para simplificar o quociente de raízes.

$$T = \frac{17\sqrt{17!}}{17\sqrt{16!}} = \sqrt{\frac{17!}{16!}} = \sqrt{17}$$

Alternativa D. O valor da expressão é $\sqrt{17}$.

Questão 30 Tangente e divisão da hipotenusa

O que se pede: determinar a tangente do ângulo $P\hat{A}C$ em um triângulo retângulo em A, com $AC = 12$, $AB = 16$ e $PC/PB = 2/3$.

1. Colocamos $A = (0, 0)$, $B = (16, 0)$ e $C = (0, 12)$. A razão $PC/PB = 2/3$ informa que PC representa 2 partes e PB representa 3 partes. Portanto, P fica a $3/5$ do percurso de B até C.

2. Interpolamos as coordenadas de B e C para localizar P. Isso equivale a partir de B e percorrer $3/5$ do deslocamento até C.

$$P = B + \frac{3}{5}(C - B) = (16, 0) + \frac{3}{5}(-16, 12) = \left(\frac{32}{5}, \frac{36}{5}\right)$$

3. Seja N a projeção perpendicular de P sobre AC. Como AC está no eixo vertical, $N = (0, 36/5)$. No triângulo retângulo ANP, temos $PN = 32/5$ e $AN = 36/5$.

4. O ângulo $P\hat{A}C$ é medido a partir do lado AC, e não de AB. Assim, PN é o cateto oposto e AN é o cateto adjacente. A tangente é a razão entre eles.

$$\tan(P\hat{A}C) = \frac{PN}{AN} = \frac{32/5}{36/5} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

5. A razão $9/8$ corresponderia à tangente do ângulo entre AP e AB, que é complementar ao ângulo pedido.

Alternativa A. A tangente procurada é $8/9$.

Gabarito de consulta

1. E 2. A 3. D 4. B 5. A
6. C 7. D 8. C 9. B 10. B
11. A 12. A 13. E 14. E 15. B
16. E 17. C 18. D 19. D 20. B
21. E 22. D 23. B e E 24. C 25. A
26. C 27. E 28. C 29. D 30. A

Na questão 23, B e E são alternativas equivalentes e corretas.

Fonte das questões

PROFMAT_ENA_2027_30_questoes_Não_Oficial.pdf. Caderno de questões fornecido para estudo, identificado como material independente e não oficial da Waldemática. As figuras das questões 3, 5, 13 e 27 foram preservadas a partir desse PDF.